Vorträge.

Über die neueren Formeln für das an einfach brechenden[1]) Medien reflectirte und gebrochene Licht.

Von A. v. Ettingshausen, w. M.

Die theoretische Bestimmung der Intensitäten des an der Trennungsfläche zweier einfach brechenden Medien reflectirten und gebrochenen Lichtes ist keineswegs durch die von Fresnel[2]) herrührenden Formeln, zu welchen unter anderen Voraussetzungen auch Neumann [3]) gelangte, vollständig erledigt worden. Erst mit den Arbeiten von Green und vornämlich mit denen von Cauchy, ist die Lösung des Problems in einen den Anforderungen der Erfahrung mehr zusagenden Zustand getreten. Green [4]) hat das Verdienst, zuerst beachtet zu haben, dass ein in der Einfallsebene oscillirender Lichtstrahl an der Trennungsfläche der Medien auch longitudinale Schwingungen anzuregen sucht, wodurch auf den Hergang der Reflexion und Brechung ein besonderer Einfluss ausgeübt wird. Cauchy [5]) hat zuerst für Licht, das in der Einfallsebene schwingt,

---

[1]) Ich hatte mich in der Überschrift dieses Aufsatzes, als ich denselben in der Classensitzung vortrug, des Ausdruckes „isotrope Medien" bedient. Versteht man unter dieser von Cauchy eingeführten Benennung jene Medien, welche das Licht nach allen Richtungen auf einerlei Weise fortpflanzen, so begreift sie auch solche in sich, welche die Polarisationsebene eines selbe treffenden Lichtstrahles drehen, also dem Lichtäther blos circuläre Schwingungen gestatten, die sich nach Massgabe des Sinnes, in welchem sie stattfinden, mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen. Derlei Medien, wie die bekannten mit rotatorischer Eigenschaft begabten Flüssigkeiten, dann die von Marbach jüngst untersuchten tessularen Krystalle, brechen schief einfallendes Licht doppelt, und auf solche sind die Betrachtungen dieses Aufsatzes nicht anwendbar.

[2]) Ann. de Ch. et de Phys. T. XVII (1821), p. 193 und p. 312; T. XLVI (1831), p. 225. Der Aufsatz ward in der Pariser Akademie gelesen den 7. Jänner 1823. S. auch Pogg. Ann. 22, p. 68 und 90.

[3]) Pogg. Ann. 40 (1837), p. 497.

[4]) Transactions of the Cambridge Philos. Soc. Vol. VIII, p. 1.

[5]) Comptes rendus d. Paris. Akad., Band 8 (1839), p. 985; Band 9, p. 1. Exercices d'Analyse et de Physique mathématique. Tom. I.

Formeln aufgestellt, welche eine neue, von dem Brechungsindex verschiedene Constante enthalten, durch deren Nullsetzen sie sich auf Fresnel's Formeln reduciren und sonach bei geeigneter Incidenz das Verschwinden des reflectirten Strahles ermöglichen; im Allgemeinen aber nur ein über Null sich erhebendes Minimum der Intensität des reflectirten Lichtes darbieten. Zur Zeit der Veröffentlichung dieser Formeln war schon das von Airy beobachtete, im Jahre 1832 bekannt gemachte [1]) Verhalten des Diamants ein Gegenstand der Aufmerksamkeit der Naturforscher geworden, welcher, obgleich eine das Licht nur einfach brechende Substanz, selbes dennoch unter keiner Incidenz vollkommen geradlinig zu polarisiren vermag. Cauchy's Analyse eröffnete nun einen Weg, um derlei Anomalien zugleich mit den Ergebnissen der Fresnel'schen Formeln, die man als die Regel ansah, einem und demselben höheren Gesetze unterzuordnen. Aber schon damals hatte Cauchy auf die Nothwendigkeit hingewiesen [2]), durch feinere Beobachtungen zu prüfen, ob seine Formeln die Reflexions- und Brechungserscheinungen an Medien genannter Art nicht vielleicht schärfer darstellen, als es die Fresnel'schen zu leisten vermögen. Dieser Anforderung ist nun durch Jamin [3]) entsprochen worden, dessen, durch Zuhilfenahme des so kräftigen Sonnenlichtes in Betreff des Verschwindens des reflectirten Strahles keiner Ungewissheit Raum lassende Beobachtungen gezeigt haben, dass es nur eine sehr geringe Anzahl einfach brechender Stoffe gibt, welche im Stande sind bei senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirtem Lichte den reflectirten Strahl zu unterdrücken, mithin gewöhnliches Licht durch Reflexion wirklich geradlinig zu polarisiren, während die Medien, denen man vordem dieses Vermögen zuschrieb, sogar diejenigen, an welchen Malus seine Entdeckung der Lichtpolarisation gemacht hat, unter keiner Incidenz das senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirte Licht der Reflexion vollständig entziehen. Das Hilfsmittel zur Messung der Intensitäten und Phasen reflectirter Strahlen, welches sich Jamin durch Anwendung des Babinet'schen Compensators schuf, gestattete ihm, die

---

[1]) Phil. Mag. 3. Ser. Vol. II, p. 20.

[2]) Exercices d'Anal. et de Phys. Math. T. I, pag. 134.

[3]) Compt. rend. T. XXVI (1848), p. 383. Pogg. Ann. 74, p. 248. Compt. rend. T. XXVIII (1849), p. 120. Annales de Ch. et de Phys. 3. Ser. T. XXIX (1850), p. 263. Pogg. Erg. B. 3, p. 232. Krönig, Journal I, p. 32.

Resultate aus den Cauchy'schen Formeln mit jenen directer Beobachtungen mehrfältig zu vergleichen, und veranlasste ihn, sich für die Richtigkeit dieser Formeln auszusprechen. Bei dieser günstigen Sachlage und bei der Sorgfalt, mit welcher Cauchy bemüht war durch wiederholte Auseinandersetzungen die Gründe klar zu machen, auf denen seine Formeln ruhen, sollte man sich wohl geneigt fühlen selbe als ein nicht weiter zu bezweifelndes Ergebniss der Naturgesetze der Lichtfortpflanzung zu betrachten. Indessen darf nicht unbeachtet bleiben, dass Haughton [1]), dem von Green eingeschlagenen Wege folgend, zu Formeln gelangte, welche, obgleich sie der Gestalt nach von den Cauchy'schen abweichen, doch die bisherigen Beobachtungen mit nicht minderer Genauigkeit darstellen. Dieser Umstand, wie auch andere Bemerkungen, die sich mir bei näherer Betrachtung der Analyse, welche zu Cauchy's Formeln führt, darboten, veranlasste mich die Bedingungen ihrer Giltigkeit in Erwägung zu ziehen, deren Ergebniss ich im Folgenden der hochzuehrenden Classe vorzulegen mir erlaube.

Zur Ausmittlung der Beschaffenheit des reflectirten und des gebrochenen Lichtes sollte man eigentlich den Hergang der Fortpflanzung der schwingenden Bewegung im Lichtäther bis an die Trennungsfläche der Medien verfolgen und erforschen, welche Abänderungen aus dem Umstande entspringen, dass die Undulation in ein Medium von anderer Beschaffenheit übergeht, wobei man auch die Rückwirkung auf das Medium, aus welchem das Licht kommt, kennen lernen würde. Auf solchem Wege lässt sich aber das Problem nicht durchführen, sondern man ist genöthigt, zu einem mehr indirecten Verfahren Zuflucht zu nehmen.

Man hat allen Grund vorauszusetzen, dass die Fortpflanzung des Lichtes in einer noch so kleinen, wenn nur messbaren Entfernung von der Grenzfläche eines Mediums gerade so vor sich gehe, als ob das Medium unbegrenzt wäre. Da solcherweise die für die Verbreitung des Lichtes in einem als unbegrenzt gedachten Medium aufgestellten Formeln bis zu einer äusserst dünnen Schichte an der Fläche, welche dieses Medium von einem andern scheidet, zulässig sind, so handelt es sich nur darum, die für die Fortpflanzung des reflectirten und gebrochenen Lichtes gebildeten Ausdrücke durch

[1]) Phil. Mag. IV. Ser. T. 6 (1853), p. 81.

gehörige Feststellung der darin unbestimmt gelassenen Constanten mit jenem für das einfallende Licht in Einklang zu bringen, eine Methode, die in der That seit Fresnel von allen mathematischen Physikern, die sich mit diesem Gegenstande beschäftigt haben, geübt worden ist.

Die Schwingungen jedes Äthertheilchens im einfallenden Strahle (sie gehen bekanntlich stets in Ebenen, welche gegen die Richtung des Strahles senkrecht sind, vor sich) lassen sich im Allgemeinen in zwei geradlinige Componenten zerlegen, deren eine in die Einfallsebene fällt, die andere aber senkrecht dagegen steht. Jede dieser Componenten wird für sich unabhängig von der andern reflectirt und gebrochen. Ich beschränke mich hier auf die Betrachtung der ersteren, nämlich der in der Einfallsebene enthaltenen, da die Bemerkungen, die ich zu machen habe, vornämlich nur diesen Fall betreffen. Zugleich setze ich bei dem Medium, in welches das Licht eindringt, dieselbe Beschaffenheit voraus wie bei jenem, aus dem das Licht kommt, nämlich die Fähigkeit geradlinig polarisirtes Licht als solches fortzupflanzen, also die völlige Abwesenheit der auf Circularpolarisation beruhenden rotatorischen Eigenschaft.

Vorgenannte Componente allein ist fähig an der Trennungsfläche der Medien nicht blos transversale, sondern auch longitudinale reflectirte und gebrochene Schwingungen anzuregen.

Es werde für ein rechtwinkeliges Coordinatensystem das Einfallsloth zur Axe der x und die Durchschnittslinie der Einfallsebene mit der, hier als eben vorauszusetzenden, Trennungsfläche der beiden Medien zur Axe der y gewählt, und zwar werde das Stück der ersteren Axe von der Trennungsebene an in das Medium hinein, in welches das Licht übertritt, als der positive Theil betrachtet und ebenso gelte der Theil der Axe der y, dessen Richtung mit jener des einfallenden Strahles einen spitzen Winkel macht, als der positive. Die diesen Axen parallelen Componenten der Elongation eines schwingenden Äthertheilchens von dem Strahle in irgend einem Zeitpunkte sollen bezüglich des einfallenden Lichtes mit ξ und η, für das (transversal schwingende) reflectirte und gebrochene Licht mit $\xi_{,}$, $\eta_{,}$ und ξ', η'; für die damit zugleich angeregten longitudinalen Schwingungen mit $\xi_{,,}$, $\eta_{,,}$ und ξ'', η'' bezeichnet werden.

Nach Cauchy's Principien sollen an der Trennungsfläche der Medien nicht blos die beiderseitigen Summen der einerlei Axe

parallelen Componenten, sondern auch die Summen der normal gegen die Trennungsebene, d. i. durch Änderung der Grundvariablen x genommenen Differentialquotienten dieser Componenten übereinstimmen. Es sollen also für $x = o$ und für jede Zeit die Gleichungen:

$$\xi + \xi_{,} + \xi_{,,} = \xi' + \xi''$$
$$\eta + \eta_{,} + \eta_{,,} = \eta' + \eta''$$
$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\xi_{,}}{dx} + \frac{d\xi_{,,}}{dx} = \frac{d\xi'}{dx} + \frac{d\xi''}{dx}$$
$$\frac{d\eta}{dx} + \frac{d\eta_{,}}{dx} + \frac{d\eta_{,,}}{dx} = \frac{d\eta'}{dx} + \frac{d\eta''}{dx}$$

bestehen.

Cauchy[1]) hat diese Gleichungen anfänglich aus Gründen gerechtfertigt, die sich auf das Verfahren der Variation der Constanten zurückführen lassen [2]), insofern man die für jedes einzelne der an einander grenzenden Medien geltenden Bewegungsformeln auf die äusserst dünne Schichte zu übertragen sucht, welche den Übergang des einen Mediums in das andere bildet. Es steht aber in Frage, ob man auf diesem Wege zu grösserer Klarheit gelangt, als wenn man geradezu die Trennungsfläche dem einen wie dem andern Medium zurechnet, und auf diesen Grund hin die Ausdrücke der Componenten der Verschiebung, welche ein in der Trennungsfläche befindliches Äthertheilchen erfährt, nach den Formeln für beide Medien genommen, einander gleich setzt und überdies die gewiss naturgemäss erscheinende Annahme beifügt, dass die Fortpflanzung der Bewegung von dem einen Medium in das andere an das Gesetz der Stetigkeit gebunden sei, wesshalb vorgedachte Übereinstimmung auch für die Differentialquotienten jener Ausdrücke nach der Variablen x in Anspruch genommen werden müsse. In solcher Auffassung erscheint die Berechtigung zur Aufstellung obiger Gleichungen nicht blos auf die undulirende Bewegung des Lichtäthers eingeschränkt, sondern das ihnen zu Grunde liegende Princip auch auf andere Fälle anwendbar, wo eine schwingende Bewegung von einem Stoffe in einen unmittelbar angrenzenden übertragen wird. So wäre es also nicht gerade nothwendig, dass die den longitudinalen

---

[1]) Comptes Rend. T. 8 (1839), 374.

[2]) Pogg. Ann. 50, 409.

Verschiebungen entsprechenden Componenten $\xi_{\prime\prime}$, ξ'' und $\eta_{\prime\prime}$, η'' schon, wie man es bezüglich der Lichtphänomene anzunehmen genöthigt ist, in jeder merklichen Distanz von der Trennungsfläche der Medien verschwinden, sondern es könnten auch die longitudinalen Schwingungen gleichzeitig mit den Transversalvibrationen, durch welche sie geweckt worden sind, bestehen. Auf ähnliche Weise liesse sich ferner die Reflexion und Brechung longitudinaler Schwingungen der Rechnung unterwerfen, indem man auch die Transversalvibrationen beachtet, welche durch die auf die Trennungsfläche der Medien übertragenen longitudinalen Schwingungen an selber geweckt werden.

Es sei nun α der Einfallswinkel des Strahles und u die am Ende der Zeit t an der Stelle desselben, deren Coordinaten x und y sind, stattfindende Elongation oder Abweichung des schwingenden Theilchens von der Ruhelage, so zeigt sich

$$\xi = u \sin \alpha \quad \text{und} \quad \eta = - u \cos \alpha,$$

wobei, wenn λ die Wellenlänge und τ die Schwingungsdauer des Lichtes, welches wie hier von homogener Beschaffenheit voraussetzen, bedeutet, aus bekannten Gründen

$$u = A \cos 2\pi \left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\lambda} - \frac{t + \theta}{\tau} \right)$$

gesetzt werden kann. Die Constante A entspricht der grössten Elongation, die das schwingende Theilchen erreicht, oder der sogenannten S c h w i n g u n g s a m p l i t u d e; die Constante θ dient zur Feststellung etwaiger Phasenunterschiede der Strahlen. Ähnliche Ausdrücke gelten auch für die den reflectirten und gebrochenen Transversalschwingungen angehörenden Componenten $\xi_{\prime}$, $\eta_{\prime}$ und ξ', η', wobei die Buchstaben α, λ, τ, θ, A und u mit den entsprechenden Accenten zu versehen sind. Für die Componenten der longitudinalen Schwingungen aber ergeben sich die Ausdrücke:

$$\xi_{\prime\prime} = u_{\prime\prime} \cos \alpha_{\prime\prime} \qquad \eta_{\prime\prime} = u_{\prime\prime} \sin \alpha_{\prime\prime},$$
$$\xi'' = u'' \cos \alpha'' \qquad \eta'' = u'' \sin \alpha'',$$

wobei die Werthe von $u_{\prime\prime}$ und u'' ebenfalls aus jenem für u durch die erforderliche Accentuirung der oben genannten Grössen hervorgehen.

Substituirt man sämmtliche solcherweise erhaltenen Ausdrücke in die obigen Bedingungsgleichungen und bedenkt man, dass diese

Gleichungen für $x=0$ und für jeden Werth von t zu gelten haben, so ergeben sich die nachstehenden Folgerungen:

$$\theta = \theta_{,} = \theta_{,,} = \theta' = \theta'',$$
$$\tau = \tau_{,} = \tau_{,,} = \tau' = \tau'',$$

$$\frac{\sin\alpha}{\lambda} = \frac{\sin\alpha_{,}}{\lambda_{,}} = \frac{\sin\alpha_{,,}}{\lambda_{,,}} = \frac{\sin\alpha'}{\lambda'} = \frac{\sin\alpha''}{\lambda''};$$

ferner

$$1)\quad A\sin\alpha + A_{,}\sin\alpha_{,} + A_{,,}\cos\alpha_{,,} = A'\sin\alpha' + A''\cos\alpha''$$

$$2)\quad A\cos\alpha + A_{,}\cos\alpha_{,} - A_{,,}\sin\alpha_{,,} = A'\cos\alpha' - A''\sin\alpha''$$

$$\frac{A\sin\alpha\cos\alpha}{\lambda} + \frac{A_{,}\sin\alpha_{,}\cos\alpha_{,}}{\lambda_{,}} + \frac{A_{,,}\cos\alpha_{,,}^2}{\lambda_{,,}} = \frac{A'\sin\alpha'\cos\alpha'}{\lambda'} + \frac{A''\cos\alpha''^2}{\lambda''}$$

$$\frac{A\cos\alpha^2}{\lambda} + \frac{A_{,}\cos\alpha_{,}^2}{\lambda_{,}} - \frac{A_{,,}\sin\alpha_{,,}\cos\alpha_{,,}}{\lambda_{,,}} = \frac{A'\cos\alpha'^2}{\lambda'} - \frac{A''\sin\alpha''\cos\alpha''}{\lambda''}.$$

In den beiden letzten Gleichungen darf man wegen der oben nachgewiesenen Gleichheit sämmtlicher Quotienten von der Form $\frac{\sin\alpha}{\lambda}$, jedes λ gegen den ihm entsprechenden $\sin\alpha$ umtauschen; sonach gehen diese Gleichungen über in

$$3)\quad A\cos\alpha + A_{,}\cos\alpha_{,} + A_{,,}\frac{\cos\alpha_{,,}^2}{\sin\alpha_{,,}} = A'\cos\alpha' + A''\frac{\cos\alpha''^2}{\sin\alpha''},$$

$$4)\quad A\frac{\cos\alpha^2}{\sin\alpha} + A_{,}\frac{\cos\alpha_{,}^2}{\sin\alpha_{,}} - A_{,,}\cos\alpha_{,,} = A'\frac{\cos\alpha'^2}{\sin\alpha'} - A''\cos\alpha''.$$

Addirt man 1) und 4), so folgt:

$$5)\quad \frac{A}{\sin\alpha} + \frac{A_{,}}{\sin\alpha_{,}} = \frac{A'}{\sin\alpha'}.$$

Zieht man ferner 2) von 3) ab, so ergibt sich:

$$6)\quad \frac{A_{,,}}{\sin\alpha_{,,}} = \frac{A''}{\sin\alpha''}$$

Mit Rücksicht auf 6) erhält man aus 1) und 2) nach gehöriger Reduction:

$$A \sin \alpha + A_{,} \sin \alpha_{,}$$
$$+ A_{,,} \frac{\sin(\alpha_{,,} - \alpha'') \cos(\alpha_{,,} + \alpha'')}{\sin \alpha_{,,}} = A' \sin \alpha'$$

und

$$A \cos \alpha + A_{,} \cos \alpha_{,}$$
$$- A_{,,} \frac{\sin(\alpha_{,,} - \alpha'') \sin(\alpha_{,,} + \alpha'')}{\sin \alpha_{,,}} = A' \cos \alpha'.$$

Eliminirt man mittelst dieser beiden Gleichungen die Grösse $A_{,,}$ und schreibt man zur Abkürzung β statt $\alpha_{,,} + \alpha''$, so folgt:

$$A \cos(\alpha - \beta) + A_{,} \cos(\alpha_{,} - \beta) = A' \cos(\alpha' - \beta).$$

Durch Verbindung dieser Gleichung mit 5) findet man:

$$\frac{A_{,}}{A} = - \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha_{,}}{\sin(\alpha_{,} - \alpha')} \cdot \frac{\cos(\alpha + \alpha' - \beta)}{\cos(\alpha_{,} + \alpha' - \beta)}.$$

Da offenbar $\lambda_{,} = \lambda$ ist, so ist auch $\sin \alpha_{,} = \sin \alpha$ und somit $\cos \alpha_{,} = \pm \cos \alpha$.

Wir haben hier augenscheinlich das untere Zeichen zu nehmen, weil sonst der reflectirte Strahl stets mit dem einfallenden coindiciren würde; es ist also $\cos \alpha_{,} = - \cos \alpha$ zu setzen, was $\alpha_{,} = 180° - \alpha$ gibt. Hiernach zeigt sich:

$$\alpha_{,} - \alpha' = 180^{0} - (\alpha + \alpha')$$
$$\alpha_{,} + \alpha' = 180^{0} - (\alpha - \alpha')$$

also

$$\sin(\alpha_{,} - \alpha') = \sin(\alpha + \alpha')$$
$$\cos(\alpha_{,} + \alpha' - \beta) = - \cos(\alpha - \alpha' + \beta);$$

dem gemäss reducirt sich das obige Resultat auf:

$$\text{I.} \qquad \frac{A_{,}}{A} = \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} \cdot \frac{\cos(\alpha + \alpha' - \beta)}{\cos(\alpha - \alpha' + \beta)}.$$

Um $\frac{A'}{A}$ zu finden, wenden wir uns an die Gleichung 5) und erhalten mit ihrer Hilfe

$$\text{II.} \qquad \frac{A'}{A} = \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha' \cos \beta}{\sin(\alpha + \alpha') \cos(\alpha - \alpha' + \beta)}.$$

Mit Benützung obiger Rechnungssätze gelangt man auch ohne Schwierigkeit zu Ausdrücken für die Quotienten $\frac{A_{,,}}{A}$ und $\frac{A''}{A}$. Diese Ausdrücke sind:

$$\text{III.} \quad \frac{A_{,,}}{A} = \frac{2 \cos a \sin (a - a') \sin a_{,,}}{\sin (a'' - a_{,,}) \cos (a - a' + \beta)}$$

$$\text{IV.} \quad \frac{A''}{A} = \frac{2 \cos a \sin (a - a') \sin a''}{\sin (a'' - a_{,,}) \cos (a - a' + \beta)}.$$

Haben die Winkel $\alpha_{,,}$ und α'' reelle Werthe, so fällt ersterer offenbar zwischen 90° und 180°, letzterer zwischen 0° und 90°, demnach die Summe $\alpha_{,,} + \alpha'' = \beta$ zwischen 90° und 270°. Setzt man $\beta = 180°$, so wird

$$\frac{A_{,}}{A} = \frac{tg (a - a')}{tg (a + a')}$$

und

$$\frac{A'}{A} = - \frac{2 \cos a \sin a'}{\sin (a + a') \cos (a - a')},$$

welche Ausdrücke, den quantitativen Werthen nach, worauf es zum Behufe der Intensitätsbestimmungen allein ankommt, mit den aus Fresnel's Analyse folgenden übereinstimmen. Es scheint bei dem ersten Anblicke, dass, um obigen Werth von β zu erzielen, lediglich $\alpha_{,,} = \alpha'' = 90°$ zu setzen sei, doch geräth man bei diesen Annahmen der Formeln III. und IV. wegen in Verlegenheit, da dann für $\frac{A_{,,}}{A}$ und $\frac{A''}{A}$ unendlich grosse Werthe erscheinen. Es ist jedoch überflüssig, sich mit diesen und ähnlichen Schwierigkeiten, der Gewinnung der Fresnel'schen Formeln wegen, zu befassen, da die Theorie des Lichtes vielmehr imaginäre Werthe für β fordert. Indem wir nun unsere Aufmerksamkeit auf solche Werthe richten, lenken wir zugleich in das von Cauchy gezogene Geleise wieder ein.

Die oben aufgestellten Werthe der Verschiebungscomponenten ξ, η eines schwingenden Äthertheilchens am Ende der Zeit t sind particuläre Integrale oder Lösungen gewisser Differentialgleichungen, welche sich uns als die oberste Quelle der Gesetze der undulirenden Bewegung darstellen. Nur reelle Lösungen dieser Gleichungen sind zu Werthen jener Componenten verwendbar. Gehen nun die Werthe von ξ, η unter besonderen Verhältnissen in den imaginären Zustand über, ohne dass die Bewegung aufhört möglich zu sein, so gibt es

andere reelle Lösungen, und diese sind die erforderlichen. Um selbe zu erhalten, bedenke man dass die in Rede stehenden Differentialgleichungen eine lineare Form haben und demgemäss als variable Factoren ihrer Lösungen statt der vom Kreise entlehnten periodischen Functionen, in unserem Falle statt der Cosinuse von Bogen, in welchen die Grundvariablen x, y, t in linearer Form mit einander verbunden sind, auch Potenzen der Grundzahl e des natürlichen Logarithmensystems, deren Exponenten imaginär sind, nämlich die Producte jener Bogen mit $\sqrt{-1}$, genommen werden können. Bringen wir nun die so gebildeten imaginären Lösungen auf die Form $P + Q\sqrt{-1}$ wobei P und Q reelle Grössen bedeuten, so leisten deren reelle Theile P für sich allein den Differentialgleichungen Genüge und stellen uns somit die verlangten reellen Lösungen dieser Gleichungen vor Augen. Dieses zuerst von Cauchy schon vor zwanzig Jahren (1836) eingeführte Verfahren ist als ein sehr glücklicher und folgenreicher Kunstgriff des vollsten Beifalles würdig, da durch ihn die Zusammenfassung mehrerer Erscheinungen unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt ermöglicht wird, die vordem als vereinzelte Thatsachen da standen; es verliert dadurch der Vorgang Fresnel's in der Ableitung seiner Formeln für die Umwandlung des geradlinig polarisirten Lichtes in circuläres oder elliptisches bei totaler Reflexion unter den bekannten Umständen jeden Anschein von Unklarheit oder Willkürlichkeit, so wie auch die Phänomene der Reflexion an Metallflächen mit dem übrigen Verhalten des Lichtes in nahen Verband gebracht werden.

Setzen wir nun zum Behufe der Ausdrücke für ξ und η

$$2\pi\left(\frac{x\cos a + y\sin a}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right) = \omega,$$

so haben wir für u zu nehmen:

$$Ae^{\omega\sqrt{-1}} = A(\cos\omega + \sqrt{-1}\,.\,\sin\omega);$$

und sollte der Factor A imaginär werden, wobei ihm die Gestalt $B + C\sqrt{-1}$ zu Theil wird, unter B und C reelle Grössen verstanden, so kann man statt $B + C\sqrt{-1}$ auch $\sqrt{B^2 + C^2}\,.\,e^{\gamma\sqrt{-1}}$ nehmen, wobei $\gamma = arc.\,tg\,\frac{C}{B}$ ist, was zur Folge hat, dass an die Stelle von u der Ausdruck

$$\sqrt{B^2 + C^2}\,.\,e^{(\omega+\gamma)\sqrt{-1}}$$

kommt und der für u zu gebrauchende reelle Werth:

$$u = \sqrt{B^2 + C^2} \cos (\omega + \gamma)$$

wird. Das Radical $\sqrt{B^2 + C^2}$, der sogenannte Modul des für A erschienenen imaginären Ausdruckes, stellt die Schwingungsamplitude dar; da nun bei den Intensitätsbestimmungen das Quadrat der Schwingungsamplitude als Factor in das Spiel tritt, so hat man selbes, indem man die Summe $B^2 + C^2$ bildet, sogleich vor sich.

Wir geben jetzt der Formel I, nachdem wir die darin vorhandenen Cosinuse entwickelt haben, die Gestalt:

$$\frac{A_{\prime}}{A} = \frac{tg\,(\alpha - \alpha')}{tg\,(\alpha + \alpha')} \cdot \frac{1 + tg\,(\alpha + \alpha') \cdot tg\,\beta}{1 - tg\,(\alpha - \alpha') \cdot tg\,\beta},$$

und nehmen an, dass $tg\,\beta$ imaginär ausfalle. Es ist:

$$tg\,\beta = tg\,(\alpha_{\prime\prime} + \alpha'') = \frac{tg\,\alpha_{\prime\prime} + tg\,\alpha''}{1 - tg\,\alpha_{\prime\prime}\,tg\,\alpha''}.$$

Nach Obigem gilt die Gleichung:

$$\frac{\sin\alpha}{\lambda} = \frac{\sin\alpha_{\prime\prime}}{\lambda_{\prime\prime}} = \frac{\sin\alpha''}{\lambda''},$$

daher ist

$$\sin\alpha_{\prime\prime} = \frac{\lambda_{\prime\prime}}{\lambda}\sin\alpha; \quad \sin\alpha'' = \frac{\lambda''}{\lambda}\sin\alpha.$$

Um nicht zu weitläufig zu werden, berufe ich mich hier blos darauf, dass die Grössen $\lambda_{\prime\prime}$, λ'' den Differentialgleichungen der Lichtfortpflanzung in einfach brechenden Medien zu Folge durch Quadratwurzeln aus reellen Grössen gegeben werden, die auch negativ sein können.

Es können somit die Quotienten $\frac{\lambda_{\prime\prime}}{\lambda}$, $\frac{\lambda''}{\lambda}$ auch die Form $h\sqrt{-1}$ annehmen, wobei h reell ist. Gerade diesen Fall setze ich hier voraus, und schreibe somit, bezüglich der reflectirten Welle mit longitudinalen Schwingungen,

$$\sin\alpha_{\prime\prime} = h\sin\alpha \,.\, \sqrt{-1}, \quad \text{was} \quad \cos\alpha_{\prime\prime} = \sqrt{1 + h^2\sin\alpha^2}$$

und

$$tg\,\alpha_{\prime\prime} = \frac{h\sin\alpha}{\sqrt{1 + h^2\sin\alpha^2}} \cdot \sqrt{-1}$$

gibt. Auf ähnliche Weise ist $tg\,\alpha''$ auszudrücken, wornach es erlaubt ist

$$tg\,\beta = p\sqrt{-1}$$

zu setzen, wobei p eine reelle von dem Einfallswinkel α abhängende Grösse anzeigt.

Bezeichnen wir den Modul von $\frac{A_{\prime}}{A}$ mit $J_{\prime}$, so folgt nach dem oben Gesagten leicht:

$$\text{V.} \qquad J_{\prime}^2 = \frac{tg\,(a - a')^2}{tg\,(a + a')^2} \cdot \frac{1 + p^2\,tg\,(a + a')^2}{1 + p^2\,tg\,(a - a')^2}.$$

Eben findet man, wenn J' der Modul von $\frac{A'}{A}$ ist, aus II.:

$$\text{VI.} \qquad J'^2 = \frac{4\cos a^2 \sin a'^2}{\sin\,(a + a')^2\,[\cos\,(a - a')^2 + p^2 \sin\,(a - a')^2]}.$$

Sind die Werthe der Grösse, welche oben h genannt wurde, durchwegs sehr klein, so kann man näherungsweise:

$$p = \varepsilon \sin a$$

annehmen, wobei ε eine Constante von sehr kleinem Betrage bedeutet. Hierdurch ergeben sich aus V. und VI. Cauchy's Formeln.

Setzt man aber:

$$p = \frac{\sin a'^2}{Q \sin\,(a + a')\sin\,(a - a')},$$

wobei Q eine durch Erfahrung festzustellende Constante ist, eine Annahme, in deren Wahrscheinlichkeit oder Zulässigkeit näher einzugehen für jetzt ausser meinem Zwecke liegt, so gibt V. die von Haughton aufgestellte Formel, und VI. jene, welche man erhält, wenn man die von ihm angewandte Analyse bis zur Gewinnung des dem gebrochenen Strahle entsprechenden Ausdruckes fortführt. Ohne Zweifel liessen sich noch andere Voraussetzungen machen, ohne dass die Formeln aufhörten, so lange nämlich die Beobachtungen nicht zu einer grösseren Schärfe gebracht werden können, mit der Erfahrung leidlich zu harmoniren.

Mit dem Imaginärwerden von $\lambda_{\prime\prime}$, λ'' ist, in Übereinstimmung mit dem was Cauchy längst schon aus den von ihm vorgebrachten Gründen gefolgert hat — und es ist dies einer seiner schönsten und wichtigsten Funde auf diesem Felde — die rasche Vernichtung der

longitudinal schwingenden Wellen, welche das reflectirte und gebrochene Licht zu begleiten streben, ausgesprochen. Es sei mir erlaubt, und wäre es auch nur der Vollständigkeit in der Behandlung des vorliegenden Gegenstandes willen, hierüber das zum Verständnisse Nöthigste beizufügen.

Um den Modul des auf die reflectirte Welle sich beziehenden Ausdruckes $A_{\prime\prime} e^{\omega_{\prime\prime}\sqrt{-1}}$, worin

$$\omega_{\prime\prime} = 2\pi \left(\frac{x \cos a_{\prime\prime}}{\lambda_{\prime\prime}} + \frac{y \sin a}{\lambda} - \frac{t}{\tau} \right)$$

ist zu bilden, will ich, um nicht eine neue Bezeichnung einführen zu müssen, unter $\lambda_{\prime\prime}$ jetzt den mit $\sqrt{-1}$ verbundenen reellen Factor in dem eigentlichen Werthe dieser Grösse verstehen, wornach, weil nach der früheren Bezeichnung:

$$\frac{1}{\lambda_{\prime\prime}} \cos a_{\prime\prime} = \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_{\prime\prime}}\right)^2 - \left(\frac{\sin a_{\prime\prime}}{\lambda_{\prime\prime}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_{\prime\prime}}\right)^2 - \left(\frac{\sin a}{\lambda}\right)^2}$$

ist, nunmehr

$$-\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_{\prime\prime}}\right)^2 + \left(\frac{\sin a}{\lambda}\right)^2} \cdot \sqrt{-1}$$

an die Stelle des früheren $\frac{1}{\lambda_{\prime\prime}} \cos \alpha_{\prime\prime}$ kommt. Es sei zur Abkürzung

$$2\pi \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_{\prime\prime}}\right)^2 + \left(\frac{\sin a}{\lambda}\right)^2} = \psi,$$

so ist es augenscheinlich, dass die Exponentielle $e^{\psi x}$ in oben genannten Modul als Factor eintritt, wesswegen derselbe bei grösseren Werthen der an sich negativen Abscisse x um so kleiner erscheint, je grösser ψ ausfällt. Für das zweite Medium, bezüglich dessen x nur positive Werthe hat, gilt Ähnliches, nur ist das Zeichen des Radicals ψ umzuändern, indem Lösungen, welche nicht sehr kleine Elongationen geben, von vorneherein auszuschliessen sind.

Ich gehe nun wieder zur Grundlage der Cauchy'schen Formeln zurück. Unter den Bedingungen, durch welche sich die Formeln für die Lichtfortpflanzung in den beiden an einander grenzenden Medien mit einander verknüpfen lassen, dürfte wohl die Übereinstimmung der Summe der in der reflectirten und gebrochenen Licht-

welle sich äussernden Arbeitsgrössen oder lebendigen Kräfte mit den in der einfallenden Welle vorhanden gewesenen vor allen anderen Satzungen ihrer Evidenz wegen den Vorrang behaupten, wie denn auch Fresnel und, ungeachtet geradezu entgegengesetzter Ansichten, doch in diesem Punkte seinem Beispiele folgend, Neumann, die Gleichung, welche diese Übereinstimmung ausspricht, an die Spitze ihrer Ableitungen der Intensitätsformeln für das reflectirte und gebrochene Licht gestellt haben.

Zum Begriffe der Arbeitsgrösse und zugleich zur Einsicht ihrer Erhaltung in den Wirkungen bewegender Kräfte gelangen wir, wenn wir untersuchen, mit welchen Intensitäten Kräfte, die an Punkten eines materiellen Systems angebracht sind, auf andere Punkte desselben einwirken. Die in Frage stehenden Intensitäten sind diejenigen, welche im umgekehrten Sinne thätig gedacht, jenen Kräften das Gleichgewicht zu halten vermögen. Es muss daher, dem Satze der virtuellen Geschwindigkeiten gemäss, die algebraische Summe der Producte der Grössen der Kräfte mit den Projectionen irgend welcher zusammengehörigen, mit der Natur des Systems verträglichen unendlich kleinen Verschiebungen der Angriffspunkte auf die Richtungen der Kräfte in der Übertragung derselben auf andere Punkte wieder erscheinen oder sich erhalten. Zu derlei zulässigen Verschiebungen gehören vor allen offenbar die Bahnstückchen, mit deren Durchlaufung die Punkte ihre Bewegung in dem Augenblicke, worin man das System ins Auge fasst, beginnen oder fortsetzen, unter der Bedingung jedoch, dass die Beschaffenheit des Systems selbst nicht mit der Zeit sich ändere, d. h. in den Gleichungen zwischen den Coordinaten der Punkte desselben, welche Gleichungen eben die Natur des Systems ausdrücken, die Zeit nicht vorkomme. Das Product einer Kraft mit der Projection des von ihrem Angriffspunkte beschriebenen Bahnstückchens auf ihre Richtung oder, was auf dasselbe hinausläuft, das Product der zur Bahn tangentiellen Componente der Kraft mit dem Bahnelemente heisst die dem betrachteten Punkte in dem Augenblicke der Betrachtung zukommende Elementararbeit, und die Summe der über eine gewisse Zeit sich erstreckenden Elementararbeit sämmtlicher Punkte, jedes Glied mit dem gehörigen Zeichen genommen, stellt die Grösse der während der genannten Zeit geleisteten Gesammtarbeit dar. Die Übereinstimmung der während eines Zeittheilchens von bewegenden

Kräften aufgewendeten Arbeit mit derjenigen, welche in der Bewegung selbst während dieses Zeittheilchens erscheint, liefert eine Gleichung, deren Integral aussagt, dass die während einer gewissen Zeit von den bewegenden Kräften geleistete Arbeit dem halben Betrage der Zunahme dessen entspreche, was man in der Mechanik „lebendige Kraft“ nennt, nämlich der Summe der Producte der Massen mit den Quadraten ihrer Geschwindigkeiten. In Zeichen: Ist P die tangentielle Componente der Kraft am Punkte, welcher während eines Zeittheilchens das Bahnelement ds beschreibt, m die Masse irgend eines Punktes des Systems, v_0 seine Geschwindigkeit am Anfange, v am Ende der gesammten Zeit, so gilt die Gleichung:

$$\Sigma \int P ds = \frac{1}{2} \Sigma m v_{,}^2 - \frac{1}{2} \Sigma m v_0^2 ,$$

wobei die Integration über die während der ganzen Zeit beschriebene Bahn sich erstreckt, und die Summirung über alle Punkte des Systems.

Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass der Satz der Erhaltung der Arbeitsgrösse auch auf die Mittheilung der schwingenden Bewegung in einem System materieller Punkte, wie man sich den Lichtäther vorstellt, angewendet werden dürfe. Die Arbeit, welche in der Bewegung eines Theilchens von der Masse m, von dem Zeitpunkte an, wo es in Ruhe ist, bis zu jenem wo es das Maximum v seiner Geschwindigkeit erlangt hat, erscheint, ist $\frac{1}{2} mv^2$, und derselbe Ausdruck bleibt auch für die in einem Stücke einer ebenen Welle, deren Theile im Einklange schwingen, liegende Arbeitsgrösse, wenn man unter m die Gesammtmasse dieses Wellenstückes versteht. Überlegt man, welche Stücke der reflectirten und der gebrochenen Welle, aus einem bestimmten Stücke der einfallenden Welle entspringen, so sieht man leicht, dass die Rauminhalte der einfallenden und reflectirten Welle einander gleich sind, und sich zum Rauminhalte der gebrochenen verhalten wie $\sin \alpha \cos \alpha$ zu $\sin \alpha' \cos \alpha'$, so dass wenn μ und μ' die Dichte des Lichtäthers in dem ersten und im zweiten Medium bezeichnen, die in den genannten zusammengehörenden Wellenstücken bewegten Massen sich verhalten wie die Producte $\mu \sin \alpha \cos \alpha$ und $\mu' \sin \alpha' \cos \alpha'$. Die Maxima der Geschwindigkeiten in der einfallenden, reflectirten und gebrochenen Welle sind die grössten Werthe der Differentialquotienten $\frac{du}{dt}$, $\frac{du_{,}}{dt}$, $\frac{du'}{dt}$; sie verhalten sich also, wenn $J_{,}$ und J' die Verhältnisszahlen der Amplituden

des reflectirten und des gebrochenen Lichtes gegen die des einfallenden vorstellen, wie $1 : J_{,} : J'$. Hiernach ergibt sich, wenn wir uns erlauben die immer mehr und rasch verschwindenden longitudinalen Wellen gleich von vorneherein ausser Acht zu lassen, die Gleichung

$$\mu \sin \alpha \cos \alpha = \mu J'^2 \sin \alpha \cos \alpha + \mu' J^2 \sin \alpha' \cos \alpha'$$

oder

$$\text{VII.} \qquad \mu (1 - J_{,}^2) \sin \alpha \cos \alpha = \mu' J'^2 \sin \alpha' \cos \alpha'.$$

Da wir oben nach Cauchy's Principien die Werthe der Grössen $J_{,}$ und J' ohne Rücksichtnahme auf die Dichte des Äthers in beiden Medien bestimmt haben, so wird durch diese Gleichung ein Verhältniss zwischen diesen Dichten festgestellt, welches wir darlegen wollen.

Es ist nach obiger Gleichung

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1 - J_{,}^2}{J'^2} \cdot \frac{\sin a \cos a}{\sin a' \cos a'}.$$

Aus V. folgt:

$$1 - J_{,}^2 = \frac{tg\,(a + a')^2 - tg\,(a - a')^2}{tg\,(a + a')^2 \left(1 + p^2\, tg\,(a - a')^2\right)},$$

und aus VI.:

$$J'^2 = \frac{4 \cos a^2 \sin a'^2}{\sin\,(a + a')^2 \cos\,(a - a')^2 \left(1 + p^2\, tg\,(a - a')^2\right)};$$

somit ist

$$\frac{1 - J_{,}^2}{J'^2} = \frac{\left(tg\,(a + a')^2 - tg\,(a - a')^2\right) \sin\,(a + a')^2 \cos\,(a - a')^2}{4 \cos a^2 \sin a'^2\, tg\,(a + a')^2}$$

$$= \frac{\sin a \cos a'}{\cos a \sin a'},$$

wonach sich ergibt:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \left(\frac{\sin a}{\sin a'}\right)^2.$$

Dies ist dasselbe Verhältniss zwischen den Dichten des Äthers in beiden Medien, welches einst Fresnel bei seiner Ableitung der Intensitätsformeln vorausgesetzt hatte; es sind also die Formeln Cauchy's und, weil wir obigen Werth von $\frac{\mu'}{\mu}$ aus den Formeln V. und VI. gefolgert haben, ohne über den Werth der Grösse p eine Annahme machen zu müssen, indem selbe aus dem Resultate ganz herausfällt, auch die Formeln Haughton's an die Voraussetzung gebunden,

dass die Dichte des Äthers in beiden Medien eine verschiedene sei. Da nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes darin sich verhalten wie der Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels, so müssen diese Geschwindigkeiten sich verkehrt verhalten wie die Quadratwurzeln der Dichten des Äthers.

Vor aller Untersuchung ist es keineswegs evident, dass die Dichten des Äthers in zwei optisch verschiedenen Medien von einander abweichen; im Gegentheile, wie aus Neumann's Arbeit erhellet (deren hoher Werth kaum einen Abbruch erfährt, wenn auch die Grundansicht auf der sie ruht, aufgegeben werden muss), ist es nichts weniger als ungereimt, die Verschiedenheit der Fortpflanzung des Lichtes in den Medien nicht in der Verschiedenheit der Dichte des Äthers, sondern vielmehr in der Ungleichheit seiner Elasticität zu suchen. Indem Neumann annimmt, die Dichte des Äthers in den Medien bleibe stets dieselbe, gelangt er genau zu den Fresnel'schen Formeln, nur mit dem Unterschiede, dass die Stellung der Schwingungsrichtung gegen die sogenannte Polarisationsebene eine andere wird, als sie aus Fresnel's Formeln folgt. Nach Neumann erfolgen die Schwingungen in, nach Fresnel senkrecht gegen die Polarisationsebene. Wenn die das Licht einfach brechenden Medien ohne Ausnahme die Eigenschaft besässen, das auf sie unter dem Winkel, für den der reflectirte Strahl auf dem gebrochenen senkrecht steht, oder dessen trigonometrische Tangente dem Brechungsexponenten gleich kommt, fallende homogene Licht vollständig zu polarisiren, so liesse sich auf dem Wege der Lichtreflexion gar nicht zwischen beiden Ansichten entscheiden. Der Umstand aber, dass diese Medien der Mehrzahl nach das senkrecht gegen die Einfallsebene geradlinig polarisirte Licht unter jedem Einfallswinkel, unter dem Polarisationswinkel nur mit geringster Intensität, reflectiren, fordert andere Formeln als die, welche Fresnel und Neumann gegeben haben. Die Wissenschaft bietet hierzu den einzigen Ausweg dar, welchen die Rücksicht auf die Anregung longitudinaler Schwingungen im Momente des Wechsels des Mediums eröffnet. Allein diese Rücksicht findet nur bei dem in der Einfallsebene schwingenden Lichte, nicht aber bei dem senkrecht dagegen, d. i. parallel zur Trennungsebene der Medien schwingenden Lichte Anwendung. Wäre nun die Neumann'sche Ansicht die richtige, so ergäbe sich stets völliger Mangel eines reflectirten Strahles wenn Licht, das senkrecht gegen die Einfalls-

ebene polarisirt ist, unter dem Polarisationswinkel die Trennungsebene der Medien trifft.

Neumann's Analyse hat vor der Fresnel'schen voraus, dass in jener bezüglich des in der Einfallsebene schwingenden Lichtes nicht blos die der Trennungsebene der Medien parallelen, sondern auch die darauf senkrechten Componenten der Bewegung für beide Medien an genannter Ebene in Übereinstimmung gebracht werden. Mit Hinzufügung der Gleichung der lebendigen Kräfte wird das Problem doch nicht überbestimmt, denn letztere Gleichung erweiset sich hier als eine Folge der beiden anderen. Nicht so bei Fresnel, welcher die gegen die Trennungsebene senkrechten Componenten bei Seite zu lassen genöthigt ist, und sich neben der Gleichheit der lebendigen Kräfte nur noch der Voraussetzung bedient, dass die der Trennungsebene parallelen Kräfte harmoniren. In den oben gebrauchten Zeichen beruht die Rechnung nach Fresnel für das in der Einfallsebene schwingende Licht auf den Gleichungen

$$\mu\,(1 - J_{,}^{2}) \sin\alpha \cos\alpha = \mu' J'^{2} \sin\alpha' \cos\alpha'$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\right)^{2}$$

$$(1 + J_{,}) \cos\alpha = J' \cos\alpha'.$$

Hieraus folgt

$$J_{,} = -\frac{tg\,(\alpha - \alpha')}{tg\,(\alpha + \alpha')}$$

$$J' = \frac{2 \cos\alpha \sin\alpha'}{\sin(\alpha + \alpha') \cos(\alpha - \alpha')}.$$

Die Bestimmung der Intensität des reflectirten Lichtes im Vergleiche mit dem einfallenden unterliegt keiner Schwierigkeit; der Ausdruck der Intensität des gebrochenen Lichtes, jene des einfallenden $= 1$ gesetzt, ist, weil die Lichtintensität ihr natürliches Mass in der lebendigen Kraft der Schwingungen findet,

$$\frac{\mu' \sin\alpha' \cos\alpha'}{\mu \sin\alpha \cos\alpha} \cdot J'^{2} = \frac{\sin 2\alpha \sin 2\alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')^{2} \cos(\alpha - \alpha')^{2}}.$$

Für das senkrecht gegen die Einfallsebene schwingende Licht sind nach Fresnel die Gleichungen

$$\mu\,(1 - J_{,}^{2})\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha = \mu'\,J'^{2}\,sin\,\alpha'\,cos\,\alpha'$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \left(\frac{sin\,\alpha}{sin\,\alpha'}\right)^{2}$$

$$1 + J_{,} = J'$$

zu verbinden, wonach

$$J_{,} = -\frac{sin\,(\alpha - \alpha')}{sin\,(\alpha + \alpha')}$$

$$J' = \frac{2\,cos\,\alpha\,sin\,\alpha'}{sin\,(\alpha + \alpha')}$$

und der Ausdruck der Intensität des gebrochenen Lichtes

$$\frac{\mu'\,sin\,\alpha'\,cos\,\alpha'}{\mu\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha}\,.\,J'^{2} = \frac{sin\,2\alpha\,sin\,2\alpha'}{sin\,(\alpha + \alpha')^{2}}$$

wird. Mit diesen Resultaten stimmen auch die von Cauchy für den vorliegenden Fall erhaltenen Formeln überein.

Nach Neumann hingegen ist $\mu = \mu'$ und für das in der Einfallsebene schwingende Licht in Folge der Übereinstimmung der mit der Trennungsfläche parallelen und der auf sie senkrechten Componenten zu beiden Seiten:

$$(1 - J_{,})\,cos\,\alpha = J'\,cos\,\alpha'$$

$$(1 + J_{,})\,sin\,\alpha = J'\,sin\,\alpha',$$

welche Gleichungen, da sie

$$(1 - J_{,}^{2})\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha = J'^{2}\,sin\,\alpha'\,cos\,\alpha'$$

geben, die Gleichheit der lebendigen Kräfte schon mit sich führen. Aus den ersteren Gleichungen erhält man

$$J_{,} = -\frac{sin\,(\alpha - \alpha')}{sin\,(\alpha + \alpha')}$$

$$J' = \frac{2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha}{sin\,(\alpha + \alpha')}\,.$$

Der Ausdruck der Intensität des gebrochenen Lichtes ist hier

$$\frac{sin\,\alpha'\,cos\,\alpha'}{sin\,\alpha\,cos\,\alpha}\,.\,J'^{2} = \frac{sin\,2\alpha\,sin\,2\alpha'}{sin\,(\alpha + \alpha')^{2}}\,.$$

Für das senkrecht gegen die Einfallsebene schwingende Licht bestehen unter der Annahme $\mu = \mu'$ die Gleichungen

$$(1 - J_{,}^{2})\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha = J'^{2}\,sin\,\alpha'\,cos\,\alpha'$$

$$1 + J_{,} = J'$$

woraus man

$$J_{,} = \frac{tg\,(a - a')}{tg\,(a + a')}$$

$$J' = \frac{\sin 2a}{\sin\,(a + a')\cos\,(a - a')}$$

und für die Intensität des gebrochenen Lichtes den Ausdruck

$$\frac{\sin a' \cos a'}{\sin a \cos a} J'^2 = \frac{\sin 2a \sin 2a'}{\sin\,(a + a')^2 \cos\,(a - a')^2}$$

erhält.

Wie man sieht, stimmen die Neumann'schen Formeln für die Reflexion und Brechung des in der Einfallsebene schwingenden Lichtes mit den Fresnel'schen für das senkrecht dagegen schwingende und umgekehrt. Nach Neumann kann der reflectirte Strahl nur bei senkrecht gegen die Einfallsebene schwingendem, nach Fresnel nur bei in der Einfallsebene schwingendem Lichte verschwinden, wozu das Unendlichwerden von $tg\,(\alpha + \alpha')$ erforderlich ist, wie es dem Brewster'schen Gesetze entspricht.

In Betreff der Neumann'schen Analyse ist noch zu bemerken, dass sich darin der Fall, wenn die Schwingungen in der Einfallsebene stattfinden, nicht durch Hinzunahme der ganz gewiss angeregten longitudinalen Schwingungen, unter Beibehaltung des Princips der vollständigen Übereinstimmung jeder der beiden Arten von Componenten für sich, vervollständigen lässt; denn dann hätte man es mit den Cauchy'schen Grundgleichungen zu thun, mit welchen, wie oben gezeigt worden, die Annahme $\mu = \mu'$ unverträglich ist.

Neumann hat die Schwingungsrichtungen des polarisirten Lichtes schon auf Grund seiner Theorie der Doppelbrechung [1]) als in der Polarisationsebene liegend ansehen zu müssen geglaubt. Allein dagegen ist zu bemerken, dass in seinen aus den Navier'schen abgeleiteten Gleichungen, wie es auch in Cauchy's erster Arbeit über diesen Gegenstand der Fall war, von vorneherein die Glieder fehlen, welche die entgegengesetzte Folgerung ermöglichen.

Der Umstand, dass, wie Neumann's oben gegebene Formeln beweisen, unter Voraussetzung gleicher Dichten des Äthers in beiden Medien, aus dem parallel zur Trennungsfläche schwingenden Lichte unter der Incidenz nach dem Polarisationswinkel kein reflectirter

[1]) Pogg. Ann. 25, 418.

Strahl erwächst, macht die Unzulänglichkeit eines von Cauchy in dem 29. Bande der *Comptes rendus*, S. 645 für die gegen die Polarisationsebene senkrechte Stellung der Schwingungsrichtung versuchten Beweises ersichtlich; denn der vermeintliche Nerv dieses Beweises liegt darin, dass das Wegfallen des reflectirten Strahles bei parallel zur Einfallsebene schwingendem Lichte von vorneherein unmöglich sein soll. (Vergl. Sitzungsberichte Bd. 8, S. 56 u. ff., wo Cauchy's Raisonnement vollständig aufgenommen ist.) Ein haltbarerer Beweisgrund für die zu rechtfertigende Behauptung wird, wie bereits oben angedeutet worden, durch die freilich wieder auf Cauchy's Arbeit sich stützende Bemerkung gewonnen, dass es einfach brechende Medien gibt, welche senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirtes Licht bei jeder Incidenz reflectiren, und dass dieses Verhalten nur durch Zuhilfenahme des Mitwirkens der an der Trennungsfläche angeregten Longitudinalschwingungen erklärt werden kann, welche Anregung nur bei dem in der Einfallsebene schwingenden Lichte stattfindet.

Der Gegenstand, den ich so eben bespreche, wird der verehrten Classe wohl die sinnreichen Bemühungen in das Gedächtniss rufen, welche unser um die physicalische Optik so hochverdientes Mitglied, Herr Sectionsrath Haidinger, auf die Rechtfertigung der nun sicher als allgemein angenommen zu betrachtenden Fresnel'schen Ansicht über die Stellung der Schwingungsrichtung gegen die Polarisationsebene verwendet hat. Sein dem Verhalten des Lichtes in dichromatischen und trichomatischen Krystallen entnommenes Argument ist allerdings eine namhafte und desshalb sehr schätzbare Verstärkung der von Fresnel in seiner Abhandlung über die Doppelbrechung [1]) zu Gunsten gedachter Ansicht angestellten Überlegung [2]), ohne jedoch den Fragepunkt mit der keiner Einwendung Raum lassenden Schärfe zu erledigen, welche man bei mathematischen Beweisen zu fordern sich stets genöthigt fühlt [3]).

---

[1]) Mém. de l'Acad. T. VII. Pogg. Ann. Bd. 23.

[2]) S. Pogg. Ann. 23, 539.

[3]) Diese Meinung sprach ich sogleich, nachdem mein hochgeehrter Freund seine diesfällige Note (Sitzungsberichte Bd. VIII, S. 52) in der Akademie gelesen hatte (22. Jänner 1852), gegen ihn aus, und habe selbe seitdem unverändert beibehalten. Als ich im Sommer desselben Jahres auf einer wissenschaftlichen Reise nach Paris mit mehreren Physikern über diesen Gegenstand zu verkehren Gelegenheit hatte, war ich nicht wenig erstaunt, von Männern, deren Urtheil stets für mich massgebend war,

Ich habe mich im Vorhergehenden an die allgemein gangbare Weise gehalten, die Intensität des Lichtes nach der in ihm liegenden lebendigen Kraft zu messen. Hiemit finde ich den Ausdruck, von welchem mein werther Freund Herr Dr. Grailich, vormaliger Zögling und jetzt mein eifriger Gehilfe am physicalischen Institute, in seiner mit so vielem Fleisse abgefassten Arbeit über die Theorie der gemischten Farben Gebrauch macht [1]), nicht im Einklange. Grailich bedient sich zur Berechnung der Lichtintensität der Formel

$$i = \int_0^\tau \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dt \quad ^{2)}$$

wo für die dem Ende der Zeit t entsprechende Elongation y des schwingenden Äthertheilchens von seiner Gleichgewichtslage der Werth

$$a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(\nu t - x) = a \sin \frac{2\pi}{\nu\tau}(\nu t - x)$$

zu substituiren ist, woraus nach verrichteter Integration

$$i = \frac{2\pi^2 a^2}{\tau}$$

folgt. Nach der üblichen Betrachtungsweise ergäbe sich das Quadrat des Maximalwerthes von

---

die Äusserung zu hören, das Haidinger'sche Argument sei für die Frage über die Stellung der Schwingungsrichtung gegen die Polarisationsebene entscheidend, während ich nur wenige fand, die meiner Meinung beipflichteten. Der geehrte Berichterstatter in den vortrefflichen Jahresberichten von Liebig und Kopp für 1852 lässt Haidinger's Beweisführung nicht nur gelten, sondern führt noch an, dass eine völlig äquivalente Betrachtung schon im Jahrgange 1849 S. 106 des Jahresberichtes zu lesen sei und vindicirt die Priorität derselben Herrn Prof. Nörrenberg, der sie schon vor geraumer Zeit ausgesprochen habe. Nach den bereits der Akademie zu verschiedenen Malen vorgetragenen Verhandlungen (Sitzungsberichte Bd. XII, S. 685; XV, S. 6 u. S. 86) über die Beweiskraft des besprochenen Argumentes habe ich nichts weiter beizufügen, als dass die Haidinger'schen Gründe, verglichen mit manchen von Mathematikern ausgegangenen Schlüssen, eben nicht im Nachtheile stehen dürften.

[1]) Sitzungsberichte, XII. Bd., S. 805.

[2]) Gewissermassen trage ich selbst, wenigstens zum Theile, Schuld an diesem Ausdrucke. Er befindet sich in einem vor sehr langer Zeit von mir zu Papier gebrachten, jedoch niemals zur Veröffentlichung bestimmt gewesenen Studium über verschiedene Punkte der Lichttheorie, wovon Herr Grailich Einsicht erhielt. Er unterliess es, mich in seiner Arbeit bei dieser Stelle zu citiren, weil ich gegen ihn äusserte, alles was in jenem Manuscripte stehe, sei so zu betrachten, als wäre es aus Cauchy's Arbeiten entlehnt.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi a}{\tau} \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

als relatives Mass der Lichtintensität in einem und demselben Medium, also

$$i = \frac{4\pi^2 a^2}{\tau^2}.$$

Ich enthalte mich jedoch einer weiteren Erörterung dieses Anstandes, sondern überlasse selbe meinem Freunde, welcher nicht ermangeln wird, den Einfluss einer Abänderung der angeführten Formel auf die Resultate seiner Arbeit in Erwägung zu ziehen.